EXERCICE N°3 : 6 points 25 '

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1+i$ et $z_B = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$. On désigne par (C) le cercle de centre O et de rayon 1.

1°) Donner la forme trigonométrique de z_A et celle de z_B.

2°) Dans la suite de l'exercice, M désigne un point de (C) d'affixe $e^{i\alpha}$, $\alpha \in [0,2\pi[$.

On considère l'application f qui tout point M de (C), associe $f(M) = MA \times MB$

a) Montrer, pour tout $\alpha \in IR$, l'égalité suivante : $e^{i2\alpha} - 1 = 2i\sin\alpha e^{i\alpha}$.

b) Montrer l'égalité suivante : $f(M) = \left| e^{i2\alpha} - 1 - \left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)e^{i\alpha} \right|$.

c) En déduire l'égalité suivante : $f(M) = \sqrt{\frac{1}{4}+\left(-\frac{3}{2}+2\sin\alpha\right)^2}$.

3°) a) En utilisant **2°) c)** montrer qu'il existe deux points M de (C), dont on donnera les coordonnées, pour lesquels $f(M)$ est minimal. Donner cette valeur minimale.

b) En utilisant **2°) c).**, montrer qu'il existe un seul point M de (C), dont on donnera les coordonnées, pour lequel $f(M)$ est maximal. Donner cette valeur maximale.

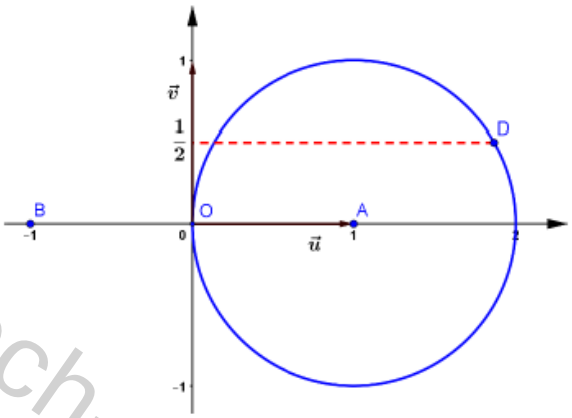
EXERCICE N°4 : 5 points 20 '

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

I- 1°) A l'aide de la figure :

a) Donner z_A et z_B les affixes respectifs de A et B

b) Déterminer $|z_D - 1|$ puis la forme algébrique de z_D (l'affixe du point D)



2°) On admet que : $z_D = 1 + e^{i\frac{\pi}{6}}$.

a) Calculer $|z_D|$.

b) Pour $\theta \in [0,\pi[$, Ecrire $e^{i\theta}+1$ sous forme exponentielle.

c) En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$.

II- A tout point $M(z), z \in \mathbb{C}^*$, on associe le point $M'(z)$ tel que $z' = -\frac{1}{\overline{z}}$.

1°) a) Déterminer une relation entre $\arg(z)$ et $\arg(z')$.

b) En déduire que les points O,M,M' sont alignés.

2°) Montrer que $\overline{(z'+1)} = \frac{1}{z}(z-1)$.

3°) On suppose que : $M \in \zeta \setminus \{O\}$.

a) Montrer que $|z'+1| = |z'|$.

b) En déduire que le point M' appartient à un droite que l'on déterminera.

4°) En déduire de ce qui précède une construction géométrique du point D' d'affixe $z_{D'} = \frac{-1}{\overline{z_D}}$.

Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn

Tous droits réservés © TakiAcademy.com